APRIL/MAY 2024

BMA51/CMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Prove that $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$.

   $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$ என நிரூபி.

2. Define abelian group.

   அபீலியன் குலம் வரையறு.

3. Define center of the group.

   குலத்தின் மையத்தை வரையறு.

4. Prove that $(z_4, \oplus)$ is not isomorphic to V_4.

   $(z_4, \oplus)$ என்பது V_4 க்கு இயல் மாறாக் கோர்த்தலாக இருக்காது என நிரூபி.

5. Define inner automorphism.

   உள் தன் ஒப்புமையை வரையறு.

6. Find the cycles of permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற வரிசை மாற்றத்தின் சுழல்களை காண்க.

7. R is a ring with identity and I is an ideal of R. If $1 \in I$ then prove that $I = R$.

I என்பது R எனும் சமனி உறுப்பு உள்ள வளையத்தின் சீர்வளையம் மற்றும் $1 \in I$ எனில் $I = R$ என நிரூபி.

8. If R is a ring such that $a^2 = a, \forall\, a \in G$, then prove that $a + a = 0$.

R என்பது ஒரு வளையம் மற்றும் $a^2 = a, \forall\, a \in G$ எனில் $a + a = 0$ என நிரூபி.

9. Define Principal ideal.

முதன்மை சீரிய உட்கணத்தை வரையறு.

10. Define Euclidean ring.

யூக்ளிடியன் வளையம் வரையறு.

19. If U is an ideal of the ring R, then prove that R/U is a ring.

R என்ற வளையத்தின் சீர்வளையம் U எனில் R/U என்பது ஒரு வளையம் என நிரூபி.

20. Prove that $J[i]$ is a Euclidean ring.

$J[i]$ என்பது ஒரு யூக்லீடியன் வளையம் என நிரூபி.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) State and prove Euler's theorem.

ஆய்லரின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

Or

(b) Prove that a subgroup of cyclic group is cyclic.

ஒரு சக்கரக் குலத்தின் உட்குலமும் சக்கரகுலம் என நிரூபி.

12. (a) Let $f:G \to G'$ be a group homomorphism, then prove that the kernel of f is a normal subgroup of G.

$f:G \to G'$ என்பது ஒரு குலத்தின் செயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனில் f -ன் மைய உரு ஒரு நேர்மை உட்குலம் என நிரூபி.

Or

(b) If H and K are subgroups of a group G, then prove that HK is a subgroup of G iff $HK = KH$.

G னும் குலத்தின் உட்குலங்கள் H, K எனில் HK என்பது G -ன் உட்குலமாக இருப்பதற்கு, இருந்தால் $HK = KH$ என நிரூபி.

13. (a) Let G be a group and ϕ an automorphism of G. If $o(a)>0, a\in G$ then prove that $o(\phi(a))=o(a)$.

G என்பது ஒரு குலம் மற்றும் ϕ என்பது G -ன் தன் ஒப்புமை $o(a)>0, a\in G$ எனில் $o(\phi(a))=o(a)$ என நிரூபி.

Or

(b) Prove that any permutation can be written as a product of disjoint transposition.

எந்த ஒரு வரிசை மாற்றத்தையும் வேறுபட்ட இரு மாற்றங்களின் பெருக்கலாக எழுதலாம் என நிரூபி.

14. (a) Prove that every field is an integral domain.

எந்த ஒரு களமும், எண் அரங்கம் என நிரூபி.

Or

(b) Prove that the only ideals of a field F are $\{0\}$ and F.

F எனும் தளத்தின் சீர்வளையங்கள் $\{0\}$ மற்றும் F மட்டுமே என நிரூபி.

15. (a) If R is a commutative ring with identity then prove that an ideal M of R is maximal iff R/M is a field.

R என்பது சமனி உறுப்பு உள்ள ஒரு பரிமாற்று வளையம் எனில் M எனும் R-ன் சீர்வளையம் மீப்பெரு சீர்வளையமாக இருப்பதற்க்கு, இருந்தால் R/M ஒரு களம் என நிரூபி.

Or

(b) State and prove unique factorization theorem.

தனித்துவக் காணிப்படுத்துதல் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. State and prove Lagrange's Theorem.

லெக்ராஞ்சியன் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

17. State and prove fundamentals theorem of homomorphism.

செயல்மாறாக் கோர்த்தலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

18. State and Prove Cayley's theorem.

கெய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.